Analiza Funkcjonalna

Bartosz Kwaśniewski

Faculty of Mathematics, University of Białystok

Wykład 11

Twierdzenie Hahna-Banacha

math.uwb.edu.pl/∼zaf/kwasniewski/pdf/skrypt.pdf

Lem1. Niech X zespolona przestrzeń unormowana. Funkcjonał $f : X \to \mathbb{C}$ jest $\mathbb{C}$-liniowy $\iff f(x) = u(x) + iu(-ix)$, gdzie $u : X \to \mathbb{R}$ jest funkcjonałem $\mathbb{R}$-liniowym. Ponadto, $\|f\| = \|u\|$.

Dowód: "$\Longrightarrow$": Jeśli f jest $\mathbb{C}$-liniowy, to $u := \operatorname{Re} f$ jest $\mathbb{R}$-liniowy i

$$\operatorname{Im} f(x) = \operatorname{Im}(i(-i)f(x)) = \operatorname{Im}(if(-ix)) = \operatorname{Re} f(-ix) = u(-ix).$$

Zatem $f(x) = u(x) + iu(-ix)$. Ponadto,

$$\|u\| = \sup_{\|x\|=1} |u(x)| = \sup_{\|x\|=1} |\operatorname{Re} f(x)| \leq \sup_{\|x\|=1} |f(x)| = \|f\|.$$

"$\Longleftarrow$": Jeśli $u : X \to \mathbb{R}$ jest $\mathbb{R}$-liniowy, to $f(x) := u(x) + iu(-ix)$ definiuje funkcjonał $f : X \to \mathbb{C}$, który jest $\mathbb{C}$-liniowy. 

Niech $x \in X$, $\|x\| = 1$. Weźmy $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = 1$, takie, że $\lambda f(x) = |f(x)|$. Wtedy

$$|f(x)| = \lambda f(x) = f(\lambda x) = \operatorname{Re} f(\lambda x) = u(\lambda x) \leq \|u\|.$$

Czyli $\|f\| \leq \|u\|$. ■

Def. Niech X przestrzeń liniowa nad $\mathbb{R}$. **Funkcjonałem Banacha** nazywamy funkcję $p : X \to \mathbb{R}$ taką, że

1. $\forall_{x,y\in X}\ p(x+y) \leq p(x) + p(y)$, (*nierówność trójkąta*)
2. $\forall_{x\in X}\ \forall_{t>0}\ p(tx) = tp(x)$. (*dodatnia jednorodność*)

Prz. Funkcjonały liniowe oraz (pół)normy to funkcjonały Banacha.

Tw. (Lemat Banacha)

$$\begin{pmatrix} X_0 \subseteq X \text{ podprzestrzeń liniowa} \\ f_0 : X_0 \to \mathbb{R} \text{ funkcjonał liniowy} \\ p : X \to \mathbb{R} \text{ funkcjonał Banacha} \\ \forall_{x\in X_0}\ \ f_0(x) \leq p(x) \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} \text{istnieje funkcjonał} \\ \text{liniowy } f : X \to \mathbb{R}, \\ \text{taki, że } f|_{X_0} = f_0, \\ \forall_{x\in X}\ \ f(x) \leq p(x) \end{pmatrix}$$

Dowód: Dowód składa się z dwóch kroków. Najpierw zastosujemy Lemat Kuratowskiego-Zorna, żeby wykazać, że istnieje maksymalne rozszerzenie f majoryzowane przez p. Następnie pokażemy, że to maksymalne rozszerzenie jest określone na całej przestrzeni X.

1) Niech Φ będzie zbiorem wszystkich liniowych przedłużeń dominowanych przez p, tzn.

$$\begin{aligned}\Phi := \big\{(\varphi, X_\varphi) : \ & X_\varphi \text{ podprzestrzeń liniowa zawierająca } X_0, \\ & \varphi : X_\varphi \to \mathbb{R} \text{ funkcjonał liniowy} \\ & \text{taki, że } \varphi|_{X_0} = f_0 \text{ oraz } \varphi \leq p|_{X_\varphi}\big\}.\end{aligned}$$

Na Φ wprowadzamy relację częściowego porządku:

$$(\varphi_1, X_{\varphi_1}) \prec (\varphi_2, X_{\varphi_2}) \ \overset{def}{\Longleftrightarrow} \ X_{\varphi_1} \subseteq X_{\varphi_2} \text{ oraz } \varphi_2|_{X_{\varphi_1}} = \varphi_1.$$

Każdy łańcuch $\{(\varphi_i, X_i)\}_{i\in I}$ (tzn. zbiór liniowo uporządkowany) ma ograniczenie górne (φ, X_φ). Mianowicie $X_\varphi := \bigcup_{i\in I} X_{\varphi_i}$ oraz $\varphi(x) := \varphi_i(x)$, gdy $x \in X_{\varphi_i}$. Zatem na mocy Lematu Kuratowskiego-Zorna istnieje element maksymalny $(\varphi_m, X_{\varphi_m})$ w Φ.

2) Jeśli $X_{\varphi_m} = X$, to kładąc $f = \varphi_m$ zakończymy dowód. Załóżmy nie wprost, że istnieje $x_0 \in X \setminus X_{\varphi_m}$ i połóżmy

$$X_1 := \mathrm{lin}\{X_{\varphi_m}, x_0\} = \{y + \lambda x_0 : y \in X_{\varphi_m},\ \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Dla dowolnego $u \in \mathbb{R}$ wzór

$$\varphi_1(y+\lambda x_0) := \varphi_m(y) + \lambda u, \qquad y \in X_{\varphi_m},\ \lambda \in \mathbb{R},$$

definiuje funkcjonał liniowy $\varphi_1 : X_1 \to \mathbb{R}$, który przedłuża φ_m.

$$\underset{x\in X_1}{\forall} \varphi_1(x) \le p(x) \iff \underset{y\in X_{\varphi_m},\,\lambda\in\mathbb{R}}{\forall} \varphi_m(y) + \lambda u \le p(y+\lambda x_0)$$

$$\iff \underset{y\in X_{\varphi_m},\,\lambda>0}{\forall} \begin{cases} u \le \frac{1}{\lambda}\left(p(y+\lambda x_0) - \varphi_m(y)\right) \\ u \ge -\frac{1}{\lambda}\left(p(y-\lambda x_0) - \varphi_m(y)\right) \end{cases}$$

$$\overset{\text{Jednor. } p}{\iff} \underset{y\in X_{\varphi_m},\,\lambda>0}{\forall} \begin{cases} u \le p\left(\frac{y}{\lambda} + x_0\right) - \varphi_m\left(\frac{y}{\lambda}\right) \\ u \ge -p\left(\frac{y}{\lambda} - x_0\right) + \varphi_m\left(\frac{y}{\lambda}\right) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} u \le b := \inf\{p(y+x_0) - \varphi_m(y) : y \in X_{\varphi_m}\} \\ u \ge a := \sup\{-p(y-x_0) + \varphi_m(y) : y \in X_{\varphi_m}\}. \end{cases}$$

Jeśli $a \le b$, to dowolnego $u \in [a,b]$ otrzymamy $(\varphi_1, X_1) \in \Phi$, który jest rozszerzeniem elementu maksymalnego $(\varphi_m, X_m) \in \Phi$ ↯.

Ale dla dowolnych $y_1, y_2 \in X_{\varphi_m}$ mamy

$$\begin{aligned} & p(y_1 + x_0) - \varphi_m(y_1) - \big(- p(y_2 - x_0) + \varphi_m(y_2)\big) \\ & \quad = \ p(y_1 + x_0) + p(y_2 - x_0) - \varphi_m(y_1 + y_2) \qquad \text{(N. trójkąta dla } p) \\ & \quad \geq \ p(y_1 + y_2) - \varphi_m(y_1 + y_2) \ \geq \ 0 \qquad\qquad (\text{bo } \varphi_m \leq p). \end{aligned}$$

Stąd $b \geq a$. ■

Twierdzenie Hahn-Banacha

Niech X przestrzeń unormowana (nad ciałem $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$). Każdy ograniczony funkcjonał liniowy $f_0 : X_0 \to \mathbb{F}$ określony na podprzestrzeni liniowej $X_0 \subseteq X$ przedłuża się do ograniczonego funkcjonału liniowego $f : X \to \mathbb{F}$ takiego, że $\|f\| = \|f_0\|$.

Dowód: (1) Załóżmy, że $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. Wtedy $p(x) := \|x\| \cdot \|f_0\|$, $x \in X$, jest funkcjonałem Banacha takim, że $f_0 \leq p$ na X_0. Zatem na mocy Lematu Banacha istnieje liniowy $f : X \to \mathbb{R}$ taki, że $f|_{X_0} = f_0$ oraz $f \leq p$ na X. Stąd

$$\|f\| = \sup_{\|x\|=1} |f(x)| \leq \sup_{\|x\|=1} p(x) = \sup_{\|x\|=1} \|x\| \cdot \|f_0\| = \|f_0\|.$$

Czyli f ograniczony oraz $\|f\| \leq \|f_0\|$. Nierówność w drugą stronę jest oczywista:

$$\|f_0\| = \sup_{\substack{\|x\|=1\\ x\in X_0}} |f_0(x)| = \sup_{\substack{\|x\|=1\\ x\in X_0}} |f(x)| \leq \sup_{\substack{\|x\|=1\\ x\in X}} |f(x)| = \|f\|.$$

(2) Załóżmy, że $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. Na mocy **Lem1** $f_0(x) = u_0(x) + iu_0(-ix)$, gdzie $u_0 : X_0 \to \mathbb{R}$ jest $\mathbb{R}$-liniowy oraz $\|u_0\| = \|f_0\|$. Z kroku (1) wiemy, że u_0 przedłuża się do funkcjonału $\mathbb{R}$-liniowego $u : X \to \mathbb{R}$ takiego, że $\|u\| = \|u_0\| = \|f_0\|$. Zatem korzystając jeszcze raz z **Lem1** otrzymujemy, że wzór

$$f(x) := u(x) + iu(-ix), \qquad x \in X,$$

definiuje $\mathbb{C}$-linowe przedłużenie f_0 oraz $\|f\| = \|u\| = \|f_0\|$. ■

Wn1. Dla każdego niezerowego wektora x przestrzeni unormowanej X istnieje funkcjonał $f \in X^*$ taki, że $\|f\| = 1$ oraz $f(x) = \|x\|$.

W szczególności, funkcjonały ograniczone rozdzielają punkty przestrzeni X, tzn. $\forall_{x,y\in X} \quad x \neq y \implies \exists_{f\in X^*} \quad f(x) \neq f(y)$.

Dowód: Niech $x \in X \setminus \{0\}$. Połóżmy $X_0 := \mathrm{lin}\{x\}$ i zdefiniujmy $f_0 : X_0 \to \mathbb{F}$ wzorem $f_0(\lambda x) = \lambda \|x\|$, $\lambda \in \mathbb{F}$. Wtedy $f_0 \in X_0^*$ oraz $\|f_0\| = 1$ (bo $|f_0(\lambda x)| = |\lambda \|x\|| = |\lambda| \cdot \|x\| = \|\lambda x\|$). Zatem f_0 przedłuża się do żądanego funkcjonału f na mocy Tw. Hahna-Banacha.

W szczególności, jeśli $x \neq y$, to $x - y \neq 0$, a więc istnieje $f \in X^*$ taki, że $f(x-y) = \|x-y\| \neq 0$, skąd $f(x) \neq f(y)$.■

Wn2. Każda przestrzeń unormowana X zanurza się w przestrzeń podwójnie sprzężoną $X^{**} := (X^*)^*$. Dokładniej, mamy liniową izometrię $i : X \to X^{**}$ daną wzorem

$$i(x)(f) := f(x), \qquad x \in X, f \in X^*.$$

Dowód: Dla każdego $x \in X$ funkcjonał $i(x) : X^* \to \mathbb{F}$ jest liniowy:

$i(x)(\lambda f_1 + f_2) = (\lambda f_1 + f_2)(x) = \lambda f_1(x) + f_2(x) = \lambda i(x) f_1 + i(x) f_2$

oraz $\|i(x)\|_{X^{**}} = \sup_{\|f\|_{X^*}=1} |i(x)(f)| = \sup_{\|f\|_{X^*}=1} |f(x)| \leq \|x\|_X$.

Czyli $i(x) \in X^{**}$ oraz $\|i(x)\|_{X^{**}} \leq \|x\|_X$.

Aby wykazać nierówność przeciwną możemy założyć, że $x \neq 0$. Wtedy na mocy **Wn1** istnieje $f \in X^*$ taki, że $\|f\|_{X^*} = 1$ oraz $f(x) = \|x\|_X$. Zatem $\|i(x)\|_{X^{**}} = \|x\|_X$, czyli odwzorowanie $X \ni x \to i(x) \in X^{**}$ jest poprawnie określoną izometrią. Ta izometria jest liniowa, bo

$$\begin{aligned} i(\lambda x_1 + x_2)(f) &= f(\lambda x_1 + x_2) = \lambda f(x_1) + f(x_2) \\ &= \lambda i(x_1)(f) + i(x_2)(f) = \big(\lambda i(x_1) + i(x_2)\big)(f). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Def. X jest **przestrzenią refleksywną** jeśli $i : X \to X^{**}$ jest izomorfizmem, czyli gdy każdy funkcjonał na X^* jest postaci $X^* \ni f \mapsto f(x) \in \mathbb{F}$ dla pewnego $x \in X$.

Przykłady

Refleksywne	Nierefleksywne
przestrzenie skończenie wymiarowe, przestrzenie Hilberta, przestrzenie L^p dla $1 < p < \infty$	c_0, $C[a,b]$, ℓ^1, ℓ^∞, $L^1([a,b])$, $L^\infty([a,b])$

Tw. (Przestrzeń dualna do L^p)

Dla $1 \leq p < \infty$ oraz przestrzeni z miarą (Ω, Σ, μ) zachodzi

$$L^p(\mu)^* \cong L^q(\mu), \qquad \text{gdzie } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Czyli dla każdego $f \in L^p(\mu)^*$ istnieje $y \in L^q(\mu)$ taki, że

$$f(x) = \int_\Omega x \cdot y \, d\mu, \qquad x \in L^p(\mu).$$

Ponadto, wtedy $\|f\| = \|y\|_q = \begin{cases} \left(\int_\Omega |y|^q \, d\mu\right)^{\frac{1}{q}}, & p > 1, \\ \operatorname{ess\,sup}|y|, & p = 1. \end{cases}$

Wn1. Dla $1 \leq p < \infty$ mamy $(\ell^p)^* \cong \ell^q$, gdzie $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Tzn.

$$f \in (\ell^p)^* \iff \exists_{y \in \ell^q} \forall_{x \in \ell^p} \; f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x(k)y(k) \; \text{ i } \; \|f\| = \|y\|_q.$$

Wn2. Przestrzenie $L^p(\mu)$, ℓ^p dla $1 < p < \infty$ są refleksywne.

Dowód: Skoro $p > 1$, to istnieje skończone $q > 1$ takie, że $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (mianowicie $q = \frac{1}{p-1}$). Stosując dwukrotnie Twierdzenie

$$L^p(\mu)^{**} = (L^p(\mu)^*)^* \cong L^q(\mu)^* \cong L^p(\mu). \qquad \blacksquare$$

Lem. $c_0^* \cong \ell^1$. Czyli $f \in c_0^* \iff \exists_{y \in \ell^1}\ f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x(k)y(k)$, $x \in c_0$, oraz wtedy $\|f\| = \|y\|_1 = \sum_{k=1}^{\infty} |y(k)|$.

Dowód: 

Wn. c_0 nie jest refleksywna

Dowód: $c_0^{**} = (c_0^*)^* \cong (\ell^1)^* \cong \ell^\infty$, ale $c_0 \not\cong \ell^\infty$, bo np. c_0 jest przestrzenią ośrodkową, a ℓ^∞ nie. $\blacksquare$